



حل تحلیلی صوت منتشر شده از ورق دایروی مرتعش کوپل شده با لایه پیزوالکتریک

مهسا پاگلی^{۱*}، کوروش خورشیدی^۲، علی اصغر قدیمی^۳، اسماعیل رضایی^۴

^۱ آوت دانشکده فنی و مهندسی، گروه مکانیک، دانشگاه اراک، آزمایشگاه تحقیقاتی صوت و ارتعاش، ۳۸۱۵۶۸۸۳۴۹، اراک، ایران.

^۲ دانشکده فنی و مهندسی، گروه مکانیک، دانشگاه اراک، آزمایشگاه تحقیقاتی صوت و ارتعاش، ۳۸۱۵۶۸۸۳۴۹، اراک، ایران.

^۳ دانشکده فنی و مهندسی، گروه برق، دانشگاه اراک، ۳۸۱۵۶۸۸۳۴۹، اراک، ایران.

* mahsa.pagoli@gmail.com

چکیده

در مقاله حاضر، آنالیز صوت منتشر شده در ورق دایروی کوپل شده با لایه پیزوالکتریک ناشی از ارتعاش خارج صفحه‌ای با به کارگیری تئوری ورق کلاسیک (CPT) مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مطالعه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ورق با استفاده از حل دقیق به دست آمده‌اند. توزیع فشار صوتی در دور میدان به صورت تحلیلی بررسی و توان آکوستیکی حاصل از مودهای خارج از صفحه‌ای ورق دایروی کوپل شده با لایه پیزوالکتریک با بکارگیری انتگرال ریلی محاسبه شده‌اند. از هرگونه اعمال بار فشاری توسط سیال بر روی ورق و انتشار صوت از لبه‌های ورق صرف نظر می‌شود. در آخر، اثر شرایط مرزی بر روی فرکانس و توان آکوستیکی بررسی شده است. جهت صحت‌گذاری نتایج این مقاله مقایسه‌ای بین نتایج بدست آمده و نتایج ارائه شده در مراجع صورت می‌پذیرد.

کلمات کلیدی: ورق دایروی؛ توان آکوستیکی؛ تئوری ورق کلاسیک؛ لایه پیزوالکتریک .

۱. مقدمه

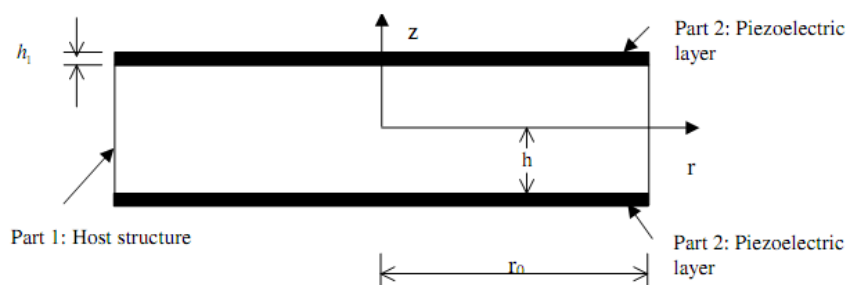
ورق‌های دایروی به طور رایج در گستره وسیعی از کاربردهای مهندسی مانند سازه‌های هواوفضا، بدنه‌ی خودروها، بدنه و بال‌های هواپیماها و موشک‌ها، بدنه‌ی کشتی‌ها و زیردریایی‌ها و... استفاده می‌شوند. بنابراین مطالعه‌ی رفتار ارتعاشی، مخصوصاً صوت منتشر شده از ارتعاش ورق‌ها جهت طراحی سازه‌ای بهینه اجتناب ناپذیر می‌گردد. از این رو فرمول بندی توان ضروری به نظر می‌رسد. بسیاری از محققان در این زمینه تحقیق نموده‌اند. رزانک [۱] برای به دست آوردن توان صوتی تشعشع کننده، عبارت تحلیلی تقریبی را ارائه داد که ارتعاش ورق را شرح می‌داد و در محدوده‌ی فرکانس بالا قابل اعمال بود. مینگ ران لی و سینگ [۲] توان آکوستیکی یک

ورق حلقوی نازک را در دور میدان محاسبه کردند. روش پیشنهادی آنها منجر به فرمول بندی تحلیلی جدیدی برای قابلیت تشعشع دیسک ویک روش مستقیم و مؤثر برای پیش بینی تشعشع صدا در یک تشعشع کننده ی دیسک حلقوی شده است. آنها از روش تقریبی ریلی-ریتز استفاده کردند. توان صوتی کل منتشر شده از ارتعاش اجباری ورق حلقوی با شرط مرزی گیردار، در مرجع [۳] آمده است. رزانک و همکاران [۴] توان صوتی ناشی از ارتعاش آزاد یک ورق حلقوی را مورد بررسی قرار دادند. خورشیدی و همکاران [۵-۱۰] بازده تابشی ورق مستطیلی با شرایط مرزی چهارطرف ساده را با روش تحلیلی در دور میدان محاسبه کرده‌اند. همچنین با روش تحلیلی دقیق فشار صوتی حاصل از ارتعاش آزاد ورق‌های مستطیلی را به دست آورده‌اند. سینگ و همکاران [۶] میدان آکوستیکی حاصل از ارتعاشات خارج صفحه ای یک ورق حلقوی نسبتاً ضخیم را در دور میدان با استفاده از تئوری ورق میندلین به دست آورده، نتایج را با نتایج به دست آمده از روش BEM مقایسه کرده‌اند. سزارنکی و همکاران [۷] توان صوتی حاصل از میدان آکوستیکی ورق را با روش مساحت معادل برای ورق دایروی ارائه داده‌اند. فرمول‌های ریاضی برای توان صوتی منتشر شده از ورق حلقوی با شرط مرزی گیردار در مرجع [۸] آورده شده است. ژو، ژنگ و هانگ بر روی صوت منتشر شده از ورق نازک بینهایت که در تماس با سیال غیر همگن است، مطالعاتی انجام دادند [۹]. خورشیدی [۱۱] آنالیز ارتعاش-صوت را برای ورق مستطیلی میندلین بر روی بستر الاستیک مورد بررسی قرار داده است.

در بسیاری نوشتجات فرمول بندی دقیق تنها برای تشعشع کننده‌های پیستونی ساده یافت می‌شود و توان صوتی منتشر شده از ورق نازک دایروی با وصله پیزوالکتریک مورد بررسی قرار نگرفته است. از این رو در این مقاله آنالیز صوت منتشر شده در ورق دایروی کوپل شده با لایه پیزوالکتریک ناشی از ارتعاش خارج صفحه‌ای با به کارگیری تئوری ورق کلاسیک (CPT) مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مطالعه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ورق با استفاده از حل دقیق به دست آمده‌اند. توزیع فشار صوتی در دورمیدان به صورت تحلیلی بررسی و توان آکوستیکی حاصل از مودهای خارج از صفحه‌ای ورق دایروی کوپل شده با لایه پیزوالکتریک با بکارگیری انتگرال ریلی محاسبه شده‌اند. از هرگونه اعمال بار فشاری توسط سیال بر روی ورق و انتشار صوت از لبه‌های ورق صرف نظر می‌شود. در آخر، اثر شرایط مرزی بر روی فرکانس و توان آکوستیکی بررسی شده است.

۲. معادلات ارتعاشی ورق نازک با وصله پیزوالکتریک

در این مقاله ورق دایروی نازک ایزوتروپیک با ضخامت $2h$ و دارای دو وصله پیزوالکتریک با ضخامت‌های h_p که در بالا و پایین ورق نصب شده‌اند مطابق شکل (۱) در نظر گرفته می‌شوند. مشخصات ورق مورد نظر در پیوست آورده شده است.



شکل ۱. ورق دایروی نازک با دو وصله پیزوالکتریک در بالا و پایین.

معادله حرکت ورق دایروی نازک کوپل شده با وصله پیزوالکتریک به صورت زیر می باشد:

$$P_3 \Delta \Delta w - P_2 \Delta \Delta w + P_1 \Delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - P_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F \quad (1)$$

توضیحات بیشتر در زمینه معادله (۱) و فرکانس‌های طبیعی در پیوست آمده است.

نیروی تحریک F ، شامل نیروی ایجاد شده توسط محرک پیزوالکتریک و نیروی خارجی است که به سطح ورق اعمال می‌شود. فرض می‌شود نیروی خارجی، نیرویی متناوب با فرکانس زاویه ای Ω ، $f_0 \sin \Omega t$ ، باشد. نیروی اعمال شده توسط محرک نیز به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$f(r, t) = 2 \bar{e}_{31} (2h + h_p) V_a(t) \left[\delta'(r_0 - r) + \frac{1}{r} \delta(r_0 - r) \right]. \quad (2)$$

که $\bar{e}_{31} = e_{31} - (C_{13}^E e_{33} / C_{33}^E)$ ثابت کاهش یافته بستر پیزوالکتریک و C_{33}^E ، C_{13}^E ، e_{31} و e_{33} به ترتیب مدول‌های الاستیسیته و ثوابت پیزوالکتریک می‌باشند. $V_a(t)$ ولتاژ اعمال شده توسط محرک و $H(r)$ تابع هویساید می‌باشد. برای حل معادله ارتعاش اجباری از روش ریلی ریتز استفاده می‌شود. برای این منظور تابع جابجایی عرضی به صورت زیر فرض می‌گردد

$$w(r, \theta, t) = \sum_{m,n} w_{mn}(r, \theta) T_{mn}(t). \quad (3)$$

w_{mn} تابع جابجایی عرضی است که از حل ارتعاش آزاد به دست می‌آید و $T_{mn}(t)$ ضرایب نامعلومی هستند که باید تعیین گردند. با جایگذاری معادله (۳) در (۱) خواهیم داشت

$$(P_1 \Delta w_{mn} - P_0 w_{mn}) \ddot{T}_{mn} + (P_1 \Delta w_{mn} - P_0 w_{mn}) \omega^2 T_{mn} = F. \quad (4)$$

طرفین معادله (۴) در مود w_{pq} ضرب و روی سطح انتگرال گرفته می‌شود. پس از ساده سازی و با به کارگیری رابطه تعامد، معادله دیفرانسیل مرتبه دوم برای ارتعاش اجباری ورق، مطابق معادله (۵) به دست می‌آید.

$$\ddot{T}_{mn} + \omega^2 T_{mn} = \frac{\iint_S f(r, t) w_{mn} ds}{k_{mn}}. \quad (5)$$

که در آن S سطح انتگرال گیری و k_{mn} رابطه تعامد بوده و از رابطه زیر قابل محاسبه است

$$k_{mn} = \iint_S (P_1 \Delta w_{mn} - P_0 w_{mn}) w_{mn} ds. \quad (6)$$

با حل معادله دیفرانسیل (۵)، تابع زمانی $T_{mn}(t)$ به دست می‌آید و رابطه کل به صورت معادله (۷) تعریف می‌گردد.

$$w(r, \theta, t) = \sum_{m,n} w_{m,n}(r, \theta) \frac{1}{k_{m,n} \omega_{m,n}} \int_0^t Q_{mn}(\tau) \sin[\omega(t - \tau)] d\tau. \quad (7)$$

۳. معادلات میدان آکوستیکی

با فرض حرکت هارمونیک، توزیع سرعت با مشتق گیری از تابع جابجایی عرضی به دست می‌آید.

$$\dot{w}(r, \theta, t) = \sum_{m,n} w(r, \theta) \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right). \quad (8)$$

فشار آکوستیکی تولید شده از یک المان منفرد در نقطه دور میدان $P(R, \psi, \varphi)$ ، براساس انتگرال ریلی، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$dP(R, \psi, \varphi) = \frac{-j \omega \rho_0}{2 \pi d} \dot{w}(r, \theta, t) e^{-jk d} dA. \quad (9)$$

که در آن ρ_0 و $k=\omega/C_0$ به ترتیب چگالی حجمی و عدد موج سیال هستند. C_0 سرعت صوت در سیال است. برای محاسبه میدان آکوستیکی از دستگاه مختصات کروی مطابق شکل (۲) استفاده می‌شود. دستگاه مختصات کروی بر مرکز سطح میانی ورق قرار گرفته است. در شکل (۲) بیانگر فاصله‌ی بین نقطه میانی المان کوچک s و نقطه‌ی رویت $P(R, \psi, \varphi)$ می‌باشد و با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید:

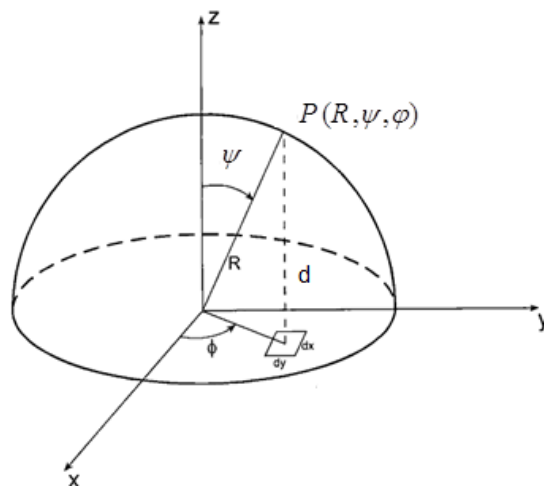
$$d = \sqrt{(X_{1p} - X_{1s})^2 + (X_{2p} - X_{2s})^2 + X_{3p}^2} . \quad (10)$$

مؤلفه‌های موقعیت در معادله (۱۰)، در دستگاه مختصات کروی به شکل زیر نمایش داده می‌شوند:

$$X_{1p} = R \sin \psi \cos \varphi, X_{1s} = r \cos \theta, X_{2p} = R \sin \psi \sin \varphi, X_{2s} = r \sin \theta, X_{3p} = R \cos \psi . \quad (11)$$

با جایگذاری معادلات (۸)، (۱۱) و (۱۰) در معادله (۹)، فشار صوتی در دور میدان به دست می‌آید.

$$P(R, \psi, \varphi) = \frac{-\omega_{mn}^2 \rho_0}{2 \pi R} e^{-jkR} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi w(r, \theta) e^{jkr \sin \psi \cos(\theta - \varphi)} r dr d\theta . \quad (12)$$



شکل ۲. شماتیک دستگاه مختصات کروی جهت تحلیل آکوستیکی ورق دایروی.

توان صوتی منتشر شده از (m, n) امین مود با استفاده از معادله زیر قابل محاسبه است:

$$\Pi_{mn} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{P_{mn}^2}{\rho_0 c_0} R^2 \sin \psi d\psi d\varphi . \quad (13)$$

۴. حل عددی

در ابتدا برای حصول اطمینان از صحت روش استفاده شده، مقایسه‌ای با نتایج به دست آمده توسط سینق [۶] صورت گرفته است. برای این منظور ورق حلقوی با خصوصیات $a=0.1515m$ ، $b=0.0825m$ ، $h=0.0315m$ ، $\rho=7905.9kg/m^3$ ، $E=218GPa$ و $v=0.0305$ در نظر گرفته شده است.

در جدول (۱) مقایسه‌ای بین فرکانس‌های طبیعی به دست آمده با روش حل دقیق، استفاده شده در این مقاله و نتایج سینق آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود درصد خطای نتایج بدست آمده نسبت به نتایج سینق کم است و سازگاری خوبی بین نتایج وجود دارد.

جدول ۱. فرکانس های طبیعی ورق حلقوی نازک با شرط مرزی گیردار- آزاد

ω_{mn} (KHz)				
m	n	سینق	روش حل دقیق	درصد خطا
۰	۰	۵.۴۶۵	۵.۴۷۸	۰.۲۴
۰	۱	۵.۵۸۰	۵.۵۹۲	۰.۲۱
۰	۲	۶.۰۹۱	۶.۰۹۷	۰.۹۸
۰	۳	۷.۳۶۰	۷.۳۶۰	۰

همچنین مقایسه ای بین نتایج به دست آمده برای توان صوتی انجام گرفته و در جدول (۲) نشان داده شده است. اختلاف به وجود آمده در نتایج به سبب اختلاف در روش های حل می باشد. در مرجع مورد نظر، شکل مودهای ارتعاشی با چند جمله ای تقریب زده شده اند، درحالیکه در کار حاضر از روش حل دقیق برای به دست آوردن فرکانس های طبیعی و شکل مودها استفاده شده است.

جدول ۲. توان صوتی منتشر شده از مودهای خارج صفحه ای ورق حلقوی با شرط مرزی گیردار- آزاد

Π_{mn} (dB re pW)				
m	n	سینق	مقاله حاضر	درصد خطا
۰	۳	۷۳.۴	۸۳.۳	۱۱.۹٪
۰	۲	۷۳.۲	۶۲.۴	۱۴.۸٪

به منظور بررسی میدان آکوستیکی ناشی از ورق دایروی نازک کوپل شده با لایه پیزوالکتریک، ورق اصلی از جنس فولاد ولایه پیزوالکتریک از جنس PZT-4 در نظر گرفته می شوند. سایر مشخصات در جدول (۵)، در پیوست آورده شده است. توان صوتی منتشرشده از ورق نازک دایروی کوپل شده با لایه پیزوالکتریک برای شرایط مرزی گیردار و تکیه گاه ساده، به ترتیب در جداول (۳) و (۴) آورده شده اند.

جدول ۳. توان صوتی منتشر شده از مودهای خارج صفحه ای نازک دایروی کوپل شده با لایه پیزوالکتریک با شرط مرزی گیردار

m	n	ω_{mn} (Hz)	Π_{mn} (dB re pW)
۰	۰	۱۴۳.۶۳	۳۸.۷۳
۰	۱	۲۹۸.۹۲	۴۷.۵۳
۰	۲	۴۹۰.۳۷	۵۷.۲۲
۱	۰	۵۵۹.۱۸	۲۲.۹

جدول ۴. توان صوتی منتشر شده از مودهای خارج صفحه ای نازک دایروی کوپل شده با لایه پیزوالکتریک با شرط مرزی تکیه گاه ساده

m	n	ω_{mn} (Hz)	Π_{mn} (dB re pW)
۰	۱	۱۹۵.۳۶	۳۳.۶۳
۰	۲	۳۶۰.۰۸	۵۵.۲۳
۰	۳	۵۶۱.۷۷	۴۳.۵
۱	۰	۴۱۷.۷۸	۴۳.۷

با توجه به نتایج مشاهده می شود که توان صوتی برای مودهایی با تعداد قطره های گره ای (n) برابر، با رفتن از حالت مرزی تکیه گاه ساده به گیردار افزایش می یابد. به عنوان مثال، توان صوتی برای مود (m,n=0,2) در شرط مرزی گیردار به سبب افزایش در فرکانس، افزایش یافته است.

۵. نتیجه گیری

این مقاله آنالیز صوت منتشر شده در ورق دایروی کوپل شده با لایه پیزوالکتریک ناشی از ارتعاش خارج صفحه‌ای با به کارگیری تئوری ورق کلاسیک (CPT) مورد مطالعه قرار گرفته است. توزیع فشار صوتی در دور میدان به صورت تحلیلی بررسی و توان آکوستیکی حاصل از مودهای خارج از صفحه‌ای با بکارگیری انتگرال ریلی محاسبه شدند. در آخر، اثر شرایط مرزی بر روی فرکانس و توان آکوستیکی بررسی شده است.

۶. پیوست

مدلی که در این مقاله برای توزیع پتانسیل الکتریکی در نظر گرفته می‌شود بگونه‌ای است که معادله ماکسول را ارضا می‌نماید و به صورت زیر فرض می‌گردد:

$$\phi(r, \theta, z, t) = \left[1 - \left(\frac{z - h - h_p / 2}{h_p / 2} \right)^2 \right] \varphi_p(r, \theta, t) - 2 \left(\frac{z - h}{h_p} \right) \varphi_a(t). \quad (14)$$

عبارت اول معادله، به اثر مستقیم پیزوالکتریک مربوط می‌شود در حالیکه عبارت دوم به ولتاژ اعمال شده توسط محرک به سطح الکترودها و شرایط مرزی بستگی دارد.

معادله حرکت برای ورق دایروی با وصله پیزوالکتریک با استفاده از تئوری کلاسیک ورق به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۲].

$$P_3 \Delta \Delta \Delta w - P_2 \Delta \Delta w + P_1 \Delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - P_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F. \quad (15)$$

ضرایب مجهول در معادله (۱۵) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$P_1 = \frac{h_p^2 \bar{E}_{11} P_0}{12 \bar{E}_{33}}, \quad P_2 = D_1 + D_2 + \frac{h_p^3 \bar{e}_{31}^2}{6 \bar{E}_{33}}, \quad P_3 = (D_1 + D_2) \frac{h_p^2 \bar{E}_{11}}{12 \bar{E}_{33}}. \quad (16)$$

که h_p ضخامت وصله پیزوالکتریک، $2h$ ضخامت ورق اصلی، $\bar{e}_{31} = e_{31} - (C_{13}^E / C_{33}^E)$ ثابت کاهش یافته بستر پیزوالکتریک و \bar{E}_{33} و \bar{E}_{11} ثابت کاهش یافته دی الکتریک می‌باشد. \bar{E}_{33} ، \bar{E}_{11} ثوابت دی الکتریک می‌باشند و از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\bar{E}_{11} = E_{11}, \quad \bar{E}_{33} = E_{33} + e_{33}^2 / C_{33}^E. \quad (17)$$

همچنین

$$D_1 = \int_{-h}^h \frac{z^2 E}{1 - \nu^2} dz, \quad D_2 = \frac{2}{3} h_p (3h^2 + 3hh_p + h_p^2) \bar{C}_{11}^E. \quad (18)$$

به منظور حل معادله (۱۵)، شکل کلی زیر برای تابع جابجایی عرضی در نظر گرفته می‌شود.

$$w(r, \theta, t) = \bar{w}(r) e^{i(p\theta - \alpha t)}. \quad (19)$$

در رابطه (۱۹) $\bar{w}(r)$ میزان جابجایی عرضی ورق در راستای Z و p نشان دهنده عدد موج در راستای مماسی ورق می‌باشد. با به کارگیری روش حل دقیق، تابع جابجایی عرضی به شکل زیر به دست می‌آید.

$$\bar{w}(r) = \sum_{i=1}^3 c_i w_{i1}(p, \chi_i r). \quad (20)$$

ضرایب و توابع مجهول به صورت معادله (۲۱) تعریف می‌شوند.

$$w_{i1}(p, \chi_i) = \begin{cases} J_p(\chi_i r) & x_i < 0 \\ I_p(\chi_i r) & x_i > 0 \end{cases}, \chi_i = \sqrt{|x_i|}, i = 1, 2, 3. \quad (21)$$

با توجه به توابع جابجایی عرضی و با در نظر گرفتن شرایط مرزی می توان فرکانس های طبیعی ورق را به دست آورد. در جدول (۵)، مشخصات ورق اصلی وصله پیزوالکتریک آورده شده است.

جدول ۵. مشخصات ورق اصلی ولایه پیزوالکتریک

مشخصات	ورق اصلی (فولاد)	لایه پیزوالکتریک (PZT4)
مدول یانگ (Gpa)	200×10^9	$C_{11}^E = 132, C_{12}^E = 71, C_{33}^E = 115,$ $C_{13}^E = 73$
چگالی حجمی	۷۸۰۰	۷۵۰۰
e31(C/m2)	-	-۴.۱
e33(C/m2)	-	۱۴.۱
e15(C/m2)	-	۱۰.۵
E11(nF/m)	-	۷.۱۲۴
E33(nF/m)	-	۵.۸۴۱

مراجع

1. W. Rdzanek, "The sound power of a circular plate for high-frequency wave radiation ", *Archives of Acoustics*, 3(4), 331-340 (1983).
2. M. Lee and R. Singh, "Analytical formulations for annular disk sound radiation using structural modes", *Journal of Acoustic*, 95(6), (1994).
3. W.P. Rdzanek, "The total sound power of some forced vibrations of a clamped annular plate in fluid", *Archives of Acoustics* 27 (3), 203–21 (2002).
4. W.P. Rdzanek Jr, Z. Engel, W. Rdzanek, "Theoretical analysis of sound radiation by supported annular plates", in *Proceedings of the XLVI Open Seminar on Acoustics*, Zakopane, 509–514, 1999.
5. کوروش خورشیدی، علی صادقی، شاهرخ حسینی هاشمی، "بررسی تحلیلی و عددی بازده تابشی صوت حاصل از ارتعاش آزاد ورق مستطیلی نسبتاً ضخیم"، *هفتمین همایش سالانه (بین المللی) انجمن هوا و فضای ایران*، (۲۰۰۸).
6. H. Lee, R. Singh, "Acoustic radiation from out-of-plane modes of an annular disk using thin and thick plate theories", *Journal of Sound and Vibration* 282, 313–339 (2005).
7. S. Czarnecki, Z. Engel, R. Panuszka, "Estimation of Equivalent Surface Area for Determination of the Acoustic Power of a Circular Plate", in *Proceedings of the Inter-Noise 79*, Warsaw-Poland, v 1, 67–70 (1979).
8. W. P. Rdzanek Jr. and Z. Engel, "Asymptotic formula for the acoustic power output of a clamped annular plate," *Applied Acoustics* 60(5), 29-43 (2000).
9. L. Zhou, H. Zheng, K.C. Hung, "Sound radiation from a thin infinite plate in contact with a layered inhomogeneous fluid", *Applied Acoustics* 63, 1177–1192 (2002).
10. K. Khorshidi, Sh. Hosseini Hashemi, A. Sadeghi, "Exact acoustical analysis of sound radiation from free vibration of rectangular Mindlin plates", *CAA Annual Conference in Halifax*, Nova Scotia, 11-13 (2006).

11. K. Khorshidi, "Vibro-acoustic analysis of Mindlin rectangular plates resting on an elastic foundation", *Scientia Iranica A* 18 (1), 45-52 (2011).
12. Q. Wang, S. T. Quek, C. T. Sun and X. Liu, " Analysis of piezoelectric coupled circular plate", *Smart Mater. Struct.* 10, 229-239 (2001).